鴿籠原理

范谷瑜

Nov. 11, 2018

【定理 1】把$n+1$隻鴿子放入n個籠子裡，至少有一個籠子裡有兩隻鴿子。

【範例 1】十三個人中一定有兩個人同一個月份生日。

【範例 2】三個整數中一定有兩個整數的和被二整除。

證明：由鴿籠原理知道三個整數中必定有兩個整數的奇偶相同，而他們的和被二整除。

【定理 2】把$mn+1$隻鴿子放入n個籠子裡，至少有一個籠子裡有$m+1$隻鴿子。

【範例 3】把十個人分成三組一定有一個小組有四個人。

【範例 4】三十個人若男女各半則圍成一圈時必有一個人的左右兩邊都是女生

證明：如果有一個男生的左右兩邊都是女生，則滿足題意。所以每個男生的旁邊至少有一個男生，也就是排成一圈時連續的男生至少兩個人，那麼連續的男生最多有七組。此時，讓女生排入圈中，因為有七組連續的男生所以有七組空隙，由鴿籠原理知道有三個連續的女生排在一起，此時中間的女生左右兩邊都是女生。

【定理 3】把m隻鴿子放入n個籠子裡，至少有一個籠子裡有$\left\lceil\frac{m}{n}\right\rceil$隻鴿子。

【範例 5】把 94 顆球放到 87 個箱子裡，至少有一個箱子裡有兩顆球。

【範例 6】把$\{1,\cdots,20\}$分割成 A、B、C 三個集合，必定存在三個相異元素x,y,z在同一個集合中使得$x+y=z$

證明：鴿籠原理可以知道必有一個集合有 7 個元素，不妨假設是 A 且$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_6<a_7$，根據題意當$i=2,\cdots,7$時$a_i-a_1$不在這個集合中，再用一次鴿籠原理得到，B 或 C 中至少有一個集合包含a_i-a_1中的三個，不妨假設是 B 且$b_1<b_2<b_3$，則根據題意b_2-b_1和b_3-b_1不在 A 中也不在 B 中，所以此兩元素皆位於 C 中，則b_3-b_2不論位於 A 或 B 或 C 中皆使得題意成立。

【定理 4】把m隻鴿子放入n個籠子裡，存在一個籠子裡至多有$\left\lfloor\frac{m}{n}\right\rfloor$隻鴿子

【範例 7】籃球比賽中，A 隊的五位選手共得了 103 分，則存在一位選手的得分最多 20 分

【範例 8】一張圖 G 是由一個點集 V 一個邊集 E 所構成，其中 E 是$\mathrm{V}\times\mathrm{V}$的一個子集合，另外以下討論的圖對所有$v\in\mathrm{V}$,$(v,v)\notin\mathrm{E}$且對所有$u,v\in\mathrm{V}$,$(u,v)\in\mathrm{E}\Leftrightarrow(v,u)\in\mathrm{E}$，圖 G 是連通的意思是，對所有$x_1,x_n\in\mathrm{V}$存在$x_1,\cdots,x_n\in\mathrm{V}$使得$\{(x_i,x_{i+1})|i=1,\cdots,n-1\}\subset E$，圖 G 中長度為$n$的圈指的是一組$x_1,\cdots,x_n\in\mathrm{V}$使得$\{(x_i,x_{i+1})|i=1,\cdots,n-1\}\cup\{(x_n,x_1)\}\subset E$，圖 G 是樹指圖 G 連通且沒有圈，圖 G 中一個點$v\in\mathrm{V}$的度數指的是$|\{(x,y)\in E|x=v\}|$。

試證明：如果圖 G 是樹且頂點有限，則圖 G 有度數為 1 的點

【引理 1】如果圖 G 是樹且有n個頂點，則圖 G 恰有$n-1$條邊

證明：因為圖 G 的頂點有限，所以不妨假設圖 G 有n個點，由引理知道圖 G 只有$n-1$條邊，故圖 G 中所有頂點的度數總合為$2(n-1)$，但是因為圖 G 有n個頂點，所以由鴿籠原理圖 G 中有一個頂點的度數至多為$\left\lfloor\frac{2(n-1)}{n}\right\rfloor=1.$

【習題 1】從 52 張樸克牌中抽出 45 張一定會有同花順。

【習題 2】一個使用九個點的手機解鎖圖形由八條線段所構成，若此八條線段兩兩不平行，則圖形起點與終點所連成的線段，必與其一平行。

【習題 3】$\{1,\cdots,100\}$排成一圈，則存在連續的三個整數使得他們的和不大於 150.

【習題 4】從$\{1,\cdots,2n\}$中挑出$n+1$個數字，必定存在一個數字是另一個的倍數。

【習題 5】假設認識與不認識的關係是互相的，也就是說 A 認識 B 若且唯若 B 認識 A，則六個人中必有三個人兩兩認識或兩兩不認識。

【習題 6】把$\{1,\cdots,70\}$分割成 A、B、C、D 四個集合，必定存在三個相異元素x,y,z在同一個集合中使得$x+y=z$

【習題 7】假設認識與不認識的關係是互相的，則任意n個人中必有兩個人認識的人數相同。

【習題 8】100個整數排成一列，則存在一串連續的整數使得他們的和被100整除。

【習題 9】初級班中有 9 個人成功參加 APMO 複試(最低 0 分滿分 35)，則存在一種把 9 個人分成三組的方式使得其中兩組人的分數總和相同。

【習題 10】從$\{1,\cdots,25\}$中選出 17 個數字，則存在其中三個數字兩兩互質。

【習題 11】假設認識與不認識的關係是互相的，現在有三個 30 人的班級，如果這 90 個人都認識另外兩個班 60 人中至少 31 個人，則可以從三個班各挑出一個人使他們兩兩認識。

【習題 12】對任何實數α以及正整數n存在整數p,q使得$\left|\alpha-\frac{q}{p}\right|\leq\frac{1}{np}$且$1\leq p\leq n.$

【習題 13】把一個正三角形三邊上的所有點(包含頂點)，分成兩個集合，則必定存在一個集合中的三個點形成直角三角形。

【習題 14】$\{1,\cdots,65\}$排成一列，則存在一個長度為 9 的遞增子列或遞減子列。

【習題 15】一個圓被 18 個點等分成 18 個弧，其中有 6 個點塗成藍色、6 個點塗成紅色、6 個點塗成黃色，則可從每個顏色中各選出兩個點連成一線段，使得這三條線段等長。

【習題 16】有 200 個學生參加一個國英數三科的考試，每科分數最低 0 級分最高 15 級分，則必有兩個學生 A、B，對每個科目 A 的級分不小於 B。

【習題 17】圖 G 是二分圖，指的是存在 A、B 為 V 的兩個子集合使得$\mathrm{A}\cup\mathrm{B}=\mathrm{V}$且$(\mathrm{A}\times\mathrm{A})\cap\mathrm{E}=(\mathrm{B}\times\mathrm{B})\cap\mathrm{E}=\emptyset$，請問在一個具有 14 個點的二分圖中，如果他不存在長度為 4 的圈，他最多能夠有幾條邊。